MATEMATIKA 1

Silabus:
Logika, Teori Himpunan, Sistem Bilangan, Grup, Aljabar Linier, Matriks, Fungsi, Barisan dan deret, Beberapa Cara pembuktian

Pengantar Teori Himpunan

Pengertian Himpunan

Georg Cantor
1845-1918

Nama lengkapnya Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Lahir di St Petersburg, Russia 3 Maret 1845 dan meninggal di Halle Jerman 6 Januari 1918. Dia dianggap sebagai bapak teori himpunan karena dialah yang mengembangkan pertamakali cabang matematika ini. Demikian pula ide-idenya mengenai himpunan terutama mengenai himpunan tak hingga.

Himpunan adalah konsep dasar dari semua cabang matematika. **Gerorg Cantor** dianggap sebagai bapak teori himpunan. Himpunan adalah sekumpulan objek yang mempunyai syarat tertentu dan jelas. Objek yang dimaksud dapat berupa bilangan, manusia, hewan, tumbuhan, negara dan sebagainya. Objek ini selanjutnya dinamakan anggota atau elemen dari himpunan itu. Syarat tertentu dan jelas dalam menentukan anggota suatu himpunan ini sangat penting karena untuk membedakan mana yang menjadi anggota himpunan dan mana yang bukan merupakan anggota himpunan. Inilah yang kemudian dinamakan himpunan yang terdefinisi dengan baik (*well-defined set*).

Notasi

Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf besar A, B, C, H, K dan sebagainya. Untuk menyatakan suatu himpunan digunakan simbol "{….}". Sementara itu untuk melambangkan anggota himpunan biasanya menggunakan huruf kecil *a, b, c, x, y* dan sebagainya. Perlu diperhatikan bahwa penulisan anggota dalam suatu himpunan hanya sekali saja Jadi tidak boleh kita menuliskan himpunan sebagai $\{1,a,b,8,b\}$. Demikian pula kita tidak boleh menyatakan himpunan sebagai {bunga, kambing, sapi, kerbau, sapi, tumbuhan}. Untuk menyatakan anggota suatu himpunan digunakan lambang "$\in$" (baca: anggota) sedangkan untuk menyatakan bukan anggota suatu himpunan digunakan lambang "$\notin$" (baca: bukan anggota).

Pendefinisian Himpunan

Untuk mendefinisikan himpunan digunakan 4 cara, yaitu :

1. Mendaftarkan semua anggotanya.

   Contoh:

   - $A = \{a,e,i,o,u\}$
   - $B = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

2. Menyatakan sifat yang dimiliki anggotanga

   Contoh:

   Perhatikan himpunan pada contoh 1 di atas dan bandingkan dengan pendefinisian di bawah ini

   - A = Himpunan vokal dalam abjad latin
   - B = Himpunan bilangan prima yang kurang dari 20

3. Menyatakan sifat dengan pola

   Contoh:

   - $P = \{0,2,4,8,10,\ldots,48\}$
   - $Q = \{1,3,5,7,9,11,13,15,\ldots\}$

   Awas dalam kasus: $R = \{2,3,5,7,\ldots,19\}$. Penulisan himpunan seperti ini bukan merupakan *well-defined* karena memunculkan ambigu, yaitu R dapat diartikan sebagai himpunan bilangan ganjil yang lebih besar dari 1 dan kurang dari 20. Sementara itu R dapat diartikan pula sebagai himpunan bilangan prima yang kurang dari 20. Oleh karena itu pendefinisian himpunan dengan menyatakan pola seperti ini harus sangat hati-hati agar tidak menimbulkan tafsiran lain.

4. Menggunakan notasi pembentuk himpunan

   Contoh:

   - $P = \{x \mid x$ himpunan bilangan asli antara 7 dan 15$\}$

     (Maksudnya $P = \{8,9,10,11,12,13,14\}$)
   - $Q = \{t \mid t$ biangan asli$\}$

     (Maksudnya $Q = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots\}$
   - $R = \{s \mid s^2-1=0, s$ bilangan real$\}$

     (Maksudnya $R = \{-1,1\}$)

Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah himpunan yang anggotanya semua objek pembicaraan. Himpunan semesta dilambangkan dengan S atau U.

Contoh :

Kalau kita membahas mengenai 1, ½ , -2, -½ , $\sqrt[3]{5}$,… maka semesta pembicaraan kita adalah bilangan real. Jadi himpunan semesta yang dimaksud adalah **R**. Apakah hanya **R** saja? Jawabannya tidak. Tergantung kita mau membatasi pembicaraanya**.** Pada contoh di atas bisa saja dikatakan semestanya adalah **C** (himpunan bilangan kompleks). Namun kita tidak boleh mengambil **Z** (himpunan bilangan bulat) sebagai semesta pembicaraan. (Mengapa?).

Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Dilambangkan dengan "∅" atau { }

Contoh:

- Himpunan bilangan bulat yang ganjil
- $\{x \mid x^2 < 0,\ x \text{ bilangan real}\}$
- Himpunan orang yang tingginya 100 meter

Himpunan Bagian

Diberikan himpunan A dan B. Jika setiap anggota A merupakan anggota B maka dikatakan A merupakan himpunan bagian (*subset*) dari B atau dikatakan B memuat A dan dilambangkan dengan $A \subset B$.

Jadi $A \subset B$ jika dan hanya jika

$x \in A \Rightarrow x \in B$

Jika ada anggota dari A yang bukan merupakan anggota B maka A bukan bukan himpunan bagian dari B, dilambangkan dengan $A \not\subset B$.

Contoh:

- A = {1,3,5} dan B = {0,1,2,3,4,5,6}. Maka $A \subset B$.
- C = {*a*,*b*,*c*,1,2} dan B = {0,1,2,3,4,5,6}. Maka $C \not\subset B$, karena ada anggota dari C yang bukan merupakan anggota B, yaitu *a*. (Pengertian "ada" berarti terdapat satu anggota C yang bukan merupakan anggota B, sudah cukup)

- Suatu himpunan pasti merupakan *subset* dirinya sendiri. Jadi $H \subset H$.

  Bukti:

  Ambil sebarang $h \in H$, maka jelas $h \in H$. Jadi $H \subset H$.

- Himpunan kosong ($\varnothing$) merupakan himpunan bagian dari semua himpunan.

  Bukti:

  Kalimat "$x \in A \Rightarrow x \in B$" pada pengertian himpunan bagian (lihat definisi di atas), selalu bernilai benar jika diambil $A = \varnothing$ dan untuk sebarang himpunan B. Hal ini disebabkan syarat cukupnya selalu tidak terpenuhi. Sama saja dengan kita mengatakan "jika bulan bisa ngomong, maka dia tak akan bohong". Kalimat ini selalu bernilai benar karena syarat cukupnya yaitu "bulan bisa ngomong" selalu tidak terpenuhi.

  Lebih lanjut mengenai hal ini akan dibicarakan dalam pembahasan mengenai LOGIKA.

Operasi Himpunan

Gabungan (Union)

Diberikan himpunan A dan B. Gabungan himpunan A dan B ditulis dengan $A \cup B$ adalah suatu himpunan yang anggotanya berada di A atau berada di B.

Jadi $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

Contoh:

$A = \{a,b,c,1,2\}$ dan $B = \{c,d,e,f\}$. Maka $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,1,2\}$

Irisan (Intersection)

Diberikan himpunan A dan B. Irisan himpunan A dan B ditulis dengan $A \cap B$ adalah suatu himpunan yang anggotanya berada di A dan juga berada di B.

Jadi $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Contoh:

$A = \{a,b,c,1,2\}$ dan $B = \{c,d,e,f\}$. Maka $A \cap B = \{c\}$

$P = \{a,b,c,1,2\}$ dan $Q = \{d,e,f\}$. Maka $A \cap B = \varnothing$

Komplemen

Diberikan suatu himpunan A. Komplemen dari A ditulis dengan “ A^c “ adalah himpunan yang anggotanya berada dalam hiompunan semesta tetapi bukan berada di A.

Jadi $A^c = \{ x \mid x \in S, x \notin A \}$

Contoh:

Diberikan semesta himpunan bilangan asli. Jika A = {0,2,4,6,…} maka A^c = {1,3,5,…}

Sifat-sifat operasi

Komutatif

Diberikan himpunan A dan B. Maka berlaku $A \cup B = B \cup A$ dan juga $A \cap B = B \cap A$

Asosiatif

Diberikan himpunan A, B dan C.

Maka berlaku $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ dan juga $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Idempoten

Diberikan suatu himpunan A. Maka berlaku $A \cup A = A$ dan juga $A \cap A = A$

Identitas

Diberikan suatu himpunan A dalam semesta S.

Maka $A \cup S = A$ dan juga $A \cap S = A$

Distributif

Diberikan himpunan A,B dan C.

Maka $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan juga $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Komplementer

Diberikan suatu himpunan A dalam semesta S. Maka $A \cup A^c = S$ dan $A \cap A^c = \varnothing$

Dalil De Morgan

Diberikan himpunan A dan B. Maka $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Soal-soal dan latihan

1. Buktikan bahwa $(A\cap B)\subset A$.

   Jawab:

   Ambil $t\in A\cap B$ sebarang. Jelas bahwa $t\in A$. Dengan demikian setiap elemen di $A\cap B$ pasti juga berada di A. Jadi $(A\cap B)\subset A$. ∎

2. Buktikan $(A\cap B)\subset B$
3. Buktikan bahwa $A\cap(A\cup B)=A$

   Bukti:

   Untuk membuktikan $A\cap(A\cup B)=A$, harus dibuktikan bahwa $A\cap(A\cup B)\subset A$ dan $A\subset A\cap(A\cup B)$

   Ambil $x\in A\cap(A\cup B)$ sebarang. Maka jelas bahwa $x\in A$. Berarti $A\cap(A\cup B)\subset A$ (*). Selanjutnya ambil $t\in A$ sebarang. Maka t jelas anggota A. Disamping itu t pasti anggota dari $A\cup B$ (lihat pengertian $A\cup B$). Akibatnya $t\in A\cap(A\cup B)$. Berarti $A\subset A\cap(A\cup B)$. (**). Dari (*) dan (**) diperoleh $A\cap(A\cup B)=A$
4. Buktikan bahwa $A\cup(A\cap B)=A$
5. Tunjukkan bahwa pernyatan berikut benar:

   a. $A\subset B$ jika dan hanya jika $A\cup B=B$

      Bukti:

      $\Rightarrow$)

      Diketahui $A\subset B$. Akan ditunjukkan bahwa $A\cup B=B$. Ambil $a\in A\cup B$ sebarang. Maka $a\in A$ atau $a\in B$. Karena $A\subset B$ maka selalu $a\in B$. Jadi $A\cup B\subset B$ (*)

      Jelas bahwa $B\subset A\cup B$ (**). Dari (*) dan (**) diperoleh $A\cup B=B$

      $\Leftarrow$)

      Diketahui $A\cup B=B$. Akan ditunjukkan bahwa $A\subset B$. Ambil sebarang $a\in A$. Jelas bahwa $a\in A\cup B$. Karena $A\cup B=B$ maka $a\in B$. Jadi $A\subset B$.

   b. $A\subset B$ jika dan hanya jika $A\cap B=A$